

УДК 532.546

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТРЕХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СКВАЖИН
МЕТОДАМИ ДЕКОМПОЗИЦИИ****А.В. ЦЕПАЕВ***Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань**E-mail alex_tsepaev@mail.ru***DECOMPOSITION METHODS FOR THE SOLUTION THREE-PHASE FLOW EQUATIONS WITH
WELLS****A.V. TSEPAEV***Institute of Mechanics and Engineering KazSC RAS, Kazan***Аннотация**

Работа посвящена решению важных задач подземной гидромеханики — задач многофазной фильтрации жидкостей при наличии скважин. Для решения этих задач предлагаются новые алгоритмы, основанные на методах декомпозиции. Алгоритмы реализованы на вычислительных системах нового поколения — гетерогенных суперкомпьютерах, построенных на основе современных центральных процессоров и графических ускорителей.

Ключевые слова: Методы декомпозиции, многофазные течения, гетерогенные вычислительные системы

Summary

The work is aimed to solve the important problems of underground fluid mechanics, a multiphase fluid filtration problems. Numerical algorithms with domain decomposition have been developed to solve the three-dimensional three-phase flow equation. These algorithms are created for heterogeneous computing system.

Key words: Mathematical model, finite element method, iterative method.

Введение Математические модели многофазных течений в пористых средах со скважинами представляют собой системы связанных нелинейных нестационарных уравнений с частными производными (см. [1]). Аналитические решения, пригодные для практического использования, можно получить только для фильтрационных потоков достаточно простой геометрии или при использовании различных упрощающих допущений. Однако большинство реальных фильтрационных потоков имеет сложную форму, и построить аналитические решения таких задач не удастся. Как правило, такие задачи решаются численно на сетках, сгущающихся к интервалам вскрытия скважин (см. [2, 3]). Требования к точности решения приводят к необходимости использования сеток, имеющих десятки миллионов узлов. Повышенные требования к вычислительным ресурсам обусловлены также нестационарностью и трехмерностью рассматриваемых процессов, неоднородностью физических характеристик пласта и др. Такие задачи могут быть решены только на высокопроизводительных вычислительных системах. Поэтому необходимы алгоритмы, позволяющие осуществить распараллеливание. Наиболее популярными методами являются методы декомпозиции. Одним из преимуществ методов декомпозиции является возможность их реализации на многопроцессорных вычислительных системах. Для решения сеточных систем уравнений по давлению и

насыщенности в работе (см. [4]) были предложены два различных метода декомпозиции области для решения задач двухфазной фильтрации. На основе предложенных методов декомпозиции построены алгоритмы для решения задачи трехфазной фильтрации жидкости с учетом капиллярных сил и массообменом между нефтяной и газовой фазами. Алгоритмы реализованы на гетерогенных вычислительных системах. Данные методы декомпозиции применялись также при решении задач фильтрации однофазной жидкости, подчиняющейся нелинейному закону Форхгеймера (см. [5]), напорно-безнапорной фильтрации (см. [6]).

1. Постановка задачи трехфазной фильтрации

Рассматривается трехфазная изотермическая фильтрация нефти, воды и газа, подчиняющаяся линейному закону Дарси. Считается, что пласт, нефть и вода несжимаемы, учитывается массообмен между нефтяной и газовой фазой. Тогда справедлива следующая система уравнений:

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}_w) + m \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}_o) + m \frac{\partial S_o}{\partial t} = \frac{J}{\rho_o}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\rho_g \mathbf{q}_g) + m \frac{\partial (\rho_g S_g)}{\partial t} = -J, \quad (3)$$

$$\mathbf{q}_\alpha = -(f_\alpha k / \mu_\alpha) \operatorname{grad}(p_\alpha - \rho_\alpha g z), \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha} S_\alpha = 1, \quad (5)$$

$$p_{c\alpha o} = p_\alpha - p_o. \quad (6)$$

Здесь $p_\alpha(x, y, z)$ — давления в фазах, индексы "o", "w", "g" соответствуют нефти, воде и газу, \mathbf{q}_α — вектор скорости фильтрации фазы α , S_α — насыщенность пласта фазой α , f_α — относительные фазовые проницаемости, k — абсолютная проницаемость, μ_α — динамическая вязкость фазы, $p_{c\alpha o}$ — капиллярное давление, ρ_α — плотности фаз, $J = \rho_o S_o / (1 - C_H F) (d_o / dt) (C_H F)$ — массовая скорость образования газовой фазы за счет нефтяной, отнесенная к единице объема смеси, $F(p) = 1 - (p/p_H)^{1/3}$ — относительный газовый фактор пластовой нефти (обобщенный коэффициент растворимости газа в нефти), C_H — массовая концентрация газа, растворенного в нефти при $p > p_H$, p_H — давление насыщения пластовой нефти. Область решения представляет из себя многосвязную область, внутренние поверхности которой определены поверхностями скважин в интервалах вскрытия пласта. В начальный момент времени считаются известными распределения давления и насыщенностей в пласте. На внешней поверхности пласта задаются граничные условия 1-го или 2-го рода. В начальный момент известны распределения насыщенностей и давлений. На скважинах задается либо забойное давление, либо суммарный расход жидкости при некотором фиксированном давлении, определяемом в процессе решения задачи жидкости. Система уравнений трехфазной фильтрации (1) — (6) дополняется граничными условиями

$$p_w = p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1, \quad (7)$$

$$-(K_o + K_w + K_g) \frac{\partial p_w}{\partial n} = q_n \text{ на } \Gamma_2, \quad (8)$$

$$p_w|_{\partial V_k} = P_k, \quad k = 1, \dots, N - M, \quad (9)$$

$$S_w = S_{w_\Gamma} \text{ на } \Gamma_3, S_o = S_{o_\Gamma} \text{ на } \Gamma_3, S_w = S_{w_k}, \quad k = 1, \dots, M, \quad (10)$$

и начальными условиями

$$p_w = P_w^0, S_w = S_w^0, S_o = S_o^0 \text{ в } D, \quad (11)$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ — внешняя граничная поверхность области D , Γ_3 — часть поверхности Γ , через которую жидкость поступает в пласт, ∂V_k — поверхность интервала вскрытия пласта k -й скважиной, P_k — заданное давление на k -й скважине, N — число скважин, M — число нагнетающих скважин S_{w_k} — заданная насыщенность в нагнетательной скважине.

2. Решение задачи методами декомпозиции области.

Задача решается в области D , представляющей собой пласт, ограниченный кровлей, подошвой, боковыми поверхностями и поверхностями интервалов вскрытия скважин V_k , $k = 1, \dots, N$. Объединение $\bigcup_{k=1}^N V_k$ является дополнением многосвязной области D до односвязной области. Область D раз-

бивается на подобласти D_k удовлетворяющим условиям: $\bar{D} = \bar{D}_0 \bigcup_{k=1}^N \bar{D}_k$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$\bar{D}_0 \cap \bar{D}_k = \gamma_k$, $S_k \cap \gamma_k = \emptyset$, где D_k — прискважинные подобласти, S_k — суммарная поверхность интервалов вскрытия k -й скважины. На области D вводится сетка Ω , ячейки которой в прискважинных зонах D_k уменьшаются в размерах к интервалам вскрытия скважин по убывающей геометрической прогрессии. Для определения p_α^{n+1} на $(n+1)$ -м временном шаге используется алгоритм, основанный на методе декомпозиции [4], с учетом капиллярных сил и фазовых переходов. Декомпозиция сеточной системы уравнений по давлению основана на согласовании решений для сгущающихся участков с решением на грубой сетке за счет введения дополнительных грубых сеток на сгущающихся участках. Для определения насыщенностей S_α используется алгоритм, основанный на методе декомпозиции [7], с учетом капиллярных сил и фазовых переходов. Декомпозиция сеточной системы уравнений по насыщенности основана на независимом решении уравнений на сгущающихся участках по неявным схемам и на согласовании этих решений с решением на грубой сетке с использованием элементов явной и неявной схем.

3. Численные результаты.

Предложенный алгоритм тестировался путем решения модельной трехмерной задачи трехфазной фильтрации жидкостей с различным числом вертикальных добывающих и нагнетающих скважин. Рассматривался десятислойный пласт ($10^3 \text{ м} \times 10^3 \text{ м} \times 18 \text{ м}$) с толщинами слоев $d_1 = 1 \text{ м}$, $d_2 = 1 \text{ м}$, $d_3 = 3 \text{ м}$, $d_4 = 1 \text{ м}$, $d_5 = 1 \text{ м}$, $d_6 = 1 \text{ м}$, $d_7 = 2 \text{ м}$, $d_8 = 1 \text{ м}$, $d_9 = 2 \text{ м}$, $d_{10} = 5 \text{ м}$ и абсолютными проницаемостями $k_1 = 10^{-3}$ дарси, $k_2 = 10^{-2}$ дарси, $k_3 = 25 \times 10^{-3}$ дарси, $k_4 = 10^{-3}$ дарси, $k_5 = 10^{-3}$ дарси, $k_6 = 10^{-2}$ дарси, $k_7 = 5 \times 10^{-3}$ дарси, $k_8 = 10^{-2}$ дарси, $k_9 = 10^{-3}$ дарси, $k_{10} = 15 \times 10^{-3}$ дарси соответственно. Кровля пласта считалась непроницаемой, на боковых поверхностях и подошве пласта давление $p_T = 12 \text{ МПа}$, на скважинах $P_k = 3 \text{ МПа}$, на боковой поверхности насыщенность $S_w = 0$, на подошве $S_w = 1$. В начальный момент времени $S_o = 1$, $S_w = 0$ за исключением зоны Γ_g (содержание газа в пласте), расположенной в центре пласта у кровли, в которой $S_o = 0$, $S_w = 0$, $S_g = 1$. Динамическая вязкость воды — $\mu_w = 1 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, динамическая вязкость нефти — $\mu_o = 15 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, плотность нефти $\rho_o = 882 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_w = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Относительные фазовые проницаемости полагались линейными функциями от насыщенностей, функции p_{cao} — логарифмическими функциями от насыщенностей [1], $p_{cow} = p_{cow}(S_w)$, $p_{cog} = p_{cog}(S_g)$. Каждый интервал вскрытия моделировался круговым цилиндром с радиусом основания $r = 0.1 \text{ м}$ и замыкался сверху и снизу сферическими поверхностями радиуса $r = 0.1 \text{ м}$. Таким образом, для каждой точки поверхности интервалов вскрытия вектор нормали определен однозначно. Ячейки, примыкающие к скважинам, имели размеры как в горизонтальной плоскости, так и по высоте, порядка 0.1 м . На основе предложенных методов построены алгоритмы для решения задачи на суперкомпьютерах с большим числом вычислительных ядер и графических процессоров. Алгоритмы распараллелены с помощью MPI-процессов, OpenMP и CUDA-технологий. Использовался язык C++ и среда разработки приложений Visual Studio 2008. При решении задачи для каждого MPI-процесса выделялось равное число сгущающихся участков сетки. Для решения задач на сгущающихся участках, соответствующих одному MPI-процессу, порождались потоки с помощью технологии OpenMP, которые распределяли эти задачи на ядра процессора и на графические устройства. При этом задачи распределялись динамически, то есть по мере их решения. Вычисления на графическом устройстве включали в себя: Предложенные алгоритмы тестировались на кластере, состоящем из 4-ядерных вычислительных узлов с процессорами Intel Core i7 2600, с графическими ускорителями компании NVidia GTX 560 TI путем решения модельной трехмерной задачи трехфазной фильтрации жидкости с вертикальными добывающими и нагнетательными скважинами. Каждая прискважинная зо-

на содержала 25000 узлов, внескважинная зона — 6000 узлов. Общее число узлов для 200 сгущающихся участков достигало 5×10^6 . Задача решалась на 2-х вычислительных узлах с общим числом ядер 8 (4 ядра на узел) и 2 GPU-ускорителя. Задачи запускались в режиме 1 MPI-процесс на один узел, каждому MPI-процессу соответствовало 1 GPU-устройство. Рассматривались следующие варианты запуска задач:

1. На всех доступных ядрах с использованием одного MPI процесса и без использования GPU-ускорителей.
2. На ядрах с использованием MPI-процессов и GPU-устройств, равных числу компьютеров в кластере. В этом случае каждому MPI-процессу соответствовало одно GPU-устройство и одно ядро.
3. На всех доступных ядрах с использованием MPI-процессов и GPU-устройств. В этом случае использовались все доступные ресурсы кластера (2 GPU-устройства и 8 ядер).

В табл. 1 — 3 приведены результаты решения. Сравнение проводилось с решением задачи на одном ядре без использования GPU-устройств.

Табл. 1: Вариант 1

Число ядер	1	2	3	4
Ускорение	1	1.7	2.1	2.9

Табл. 2: Вариант 2

Число GPU-устройств	1 GPU(1 ядро)	2 GPU(2 ядра)
Ускорение	17.3	30.1

Табл. 3: Вариант 3

Число GPU-устройств	1 GPU(8 ядер)	2 GPU(8 ядер)
Ускорение	20.2	36.3

В табл. 1 показано ускорение времени решения задачи, при использовании ядер только одного вычислительного узла. Эффективность использования ядер достигала 72%. Эффективность использования GPU-устройств рассчитывалась из табл. 2 и достигала 80%.

4. Заключение. Построены алгоритмы для решения задачи трехфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущениями в районе скважин, основанные на методах декомпозиции области. На основе предложенных методов декомпозиции построены алгоритмы для решения задачи на гетерогенных вычислительных системах. Установлена высокая эффективность использования многопроцессорных систем, построенных на базе графических процессоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chen Z., Huan G., Ma Y.** Computational methods for multiphase flows in porous media. — SIAM, 2006. — 549 p.

2. **Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.М., Максимов В.М.** Подземная гидравлика. — М.: Недра, 1986. — 303 с.
3. **Азис Х., Сеттари Э.** Математическое моделирование пластовых систем. — М.: Недра, 1982. — 407 с.
4. **Мазуров П.А., Цепаев А.В.** Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками // Вычислительные методы и программирование. — 2006. — Т. 7, № 2. — С. 115–123.
5. **Мазуров П.А., Цепаев А.В.** Метод решения нелинейных задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 3. — С. 33–42.
6. **Губайдуллин Д.А., Мазуров П.А., Цепаев А.В.** Алгоритм решения трехмерных задач напорно-безнапорной стационарной фильтрации жидкости со сгущающимися участками сетки // Вычислительные методы и программирование. — 2005. — Т. 6, № 2. — С. 217–225.
7. **Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Цепаев А.В.** Алгоритмы распараллеливания на сгущающихся сетках в задачах трехфазной фильтрации жидкости // Вычислительные методы и программирование. — 2007. — Т. 8, № 2. — С. 360–366.
8. **Цепаев А.В.** Использование гетерогенных вычислительных систем для решения задач фильтрации жидкости методами декомпозиции области // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 39–44.

REFERENCES

1. **Chen Z., Huan G., Ma Y.** Computational methods for multiphase flows in porous media. — SIAM, 2006. — 549 p.
2. **Basniev K.S., Vlasov A.M., Kochina I.M., Maksimov V.M.** Underground hydraulics [Podzemnaia gidravlika]. — Moscow: Nedra, 1986. — 303 p. (in Russian)
3. **Aziz K., Settari A.** Petroleum reservoir simulation [Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem]. — Moscow: Nedra, 1982. — 407 p. (in Russian)
4. **Mazurov P.A., Tsepaev A.V.** An algorithm for solving two-phase flow problems with fine grid segments [Algoritmy dlia rasparrallelivaniia resheniia zadach dvukhfaznoi fil'tratsii na setkakh so sgushchaiushchimisia uchastkami] // Vychislitel'nye Metody i Programmirovaniye. — 2006. — V. 7, № 2. — P. 115–123. (in Russian)
5. **Mazurov P.A., Tsepaev A.V.** Method of solution three-dimensional nonlinear flow equation in confined aquifer with partially penetrating wells [Metod resheniia nelineinykh zadach fil'tratsii zhidkosti v trekhmernykh plastakh s gidrodinamicheskinesovershennymi skvazhinami] // Matematicheskoe Modelirovanie. — 2004. — V. 16, № 3. — P. 33–42. (in Russian)
6. **Gubajdullin D.A., Mazurov P.A., Tsepaev A.V.** An algorithm for solving the stationary flow equation with fine grid segment in a confined-unconfined aquifer [Algoritm rasparrallelivaniia na sgushchaiushchikhsia setkakh v zadachakh trekhfaznoi fil'tratsii zhidkosti] // Vychislitel'nye Metody i Programmirovaniye. — 2012. — V. 13, № 1. — P. 39–44. (in Russian)
7. **Gubajdullin D.A., Nikiforov A.I., Tsepaev A.V.** Parallelization algorithms on fine-grid segment in three-phase fluid flow problems [Algoritmy resheniia trekhmernykh zadach naporno-beznapornoj stazionarnoi fil'tratsii zhidkosti so sgushchaiushchimisia uchastkami setki] // Vychislitel'nye Metody i Programmirovaniye. — 2007. — V. 8, № 2. — P. 360–366. (in Russian)
8. **Tsepaev A.V.** Application of heterogeneous computing systems for solving the problem of fluid flow by domain decomposition methods [Ispol'zovanie geterogennykh vychislitel'nykh sistem dlia resheniia zadach fil'tratsii zhidkosti metodami dekompozitsii oblasti] // Vychislitel'nye Metody i Programmirovaniye. — 2012. — V. 13, № 1. — P. 39–44. (in Russian)